



## Вопросы к теорзачёту М8 профи

24 июля

### Алгебра

1. Неравенство между средним арифметическим и геометрическим. Наибольшее значение выражения  $x^p y^q$  при фиксированной сумме  $x + y$  (2.7) Наименьшее значение выражения  $ma^2 + mb^2 + c^2$  при фиксированной сумме  $ab + bc + ac$  (9.3b)
2. Многочлены. Теорема о делении с остатком. Теорема Безу. Следствия из теоремы Безу. (20)
3. Многочлены над  $\mathbb{Z}_p$ . Теорема Безу. Теорема Вильсона (32.1). Доказать, что все функции  $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$  являются многочленами степени не выше  $p - 1$  (32.2бв, 32.4).
4. Неравенство Коши с натуральными весами. Неравенство Гёльдера с рациональными весами. Условие равенства (33.1д).

### ТЧ

5. Рождественская теорема Ферма (14.3). Теорема Ферма Эйлера (14.4б).
6. Доказать, что для простого  $p > 2$  существует представление  $a^2 + b^2 + 1^2 + 0^2 = tp$  (14.5б). Доказать, что в минимальном представлении  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = tp$  число  $t$  – нечётно и меньше  $p$  (14.5вг). Построить представление  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = tn$  при  $n < t$ . (14.5д).
7. Доказать, что произведение сумм 4 квадратов является суммой 4 квадратов (14.5е). Пользуясь леммами о существовании представлений особого вида (14.5бвгд – без доказательства), доказать теорему Лагранжа (14.5жзи).
8. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Критерий Эйлера (17.3). Критерий Гаусса (17.4).
9. Вычисление символа Лежандра  $\left(\frac{2}{p}\right)$  (22.6). Доказательство бесконечности множества простых вида  $8k + 3, 8k + 5, 8k + 7$  по отдельности (22.8).
10. Уравнение Пелля  $x^2 - ky^2 = 1$ . Поиск всех решений на основе фундаментального решения (26.4). Рекуррентные соотношения для решений (26.3).
11. Теорема о существовании решения уравнения Пелля  $x^2 - ky^2 = 1$ .
12. Первообразный корень. Усиление теоремы Эйлера. Несуществование первообразных корней по модулям, отличным от  $2, 4, p^k, 2p^k$  (34.1, 34.2). Лемма Гаусса (34.3б). Существование первообразного корня по простому модулю.

### Комбинаторика

13. Бесконечные множества. Задача о потомках Адама. (10.2) Существование возрастающей подпоследовательности в последовательности натуральных чисел (10.4) Существование монотонной подпоследовательности. (10.7)
14. Достаточное условие существования правильной покраски вершин связного графа (12.1). Доказать, что если вершины нельзя правильно покрасить менее, чем в  $k$  цветов, то в  $k$ -цветной раскраске найдётся разноцветный путь по всем цветам (12.3).

- 15.** Гамильтоновы Пути и циклы. Теорема Оре (18.3). Теорема Дирака (18.4).
- 16.** Счётность и несчётность. Доказать счётность множества  $\mathbb{Q}$  и несчётность множества  $\mathbb{R}$  (23.3б, 23.7г). Доказать счётность множества конечных и несчётность множества бесконечных подмножеств  $\mathbb{N}$  (23.4б, 23.7д).
- 17.** Лемма Бернсайда: доказать, что размер стабилизатора одной раскраски является делителем размера группы преобразований (формула  $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$ ) (24.2вгде).
- 18.** Лемма Бернсайда: доказать лемму, пользуясь формулой  $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$  (24.2жзи).
- 19.** Сильная связность. Выделение сильно связной компоненты, конденсация (27.3) Теорема Муна. Теорема Редди-Камиона.
- 20.** Теорема Рамсея. Оценки  $R(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$ ,  $R(n, n) \geq 2^{\frac{n}{2}}$  (31.3б, 31.5б).

### **Геометрия**

- 21.** Векторы. Единственность представления вектора в базисе (1.5а). Критерий коллинеарности через базис (1.5б). Доказать, что если сумма неколлинеарных векторов равна  $\vec{0}$ , то из них составляется выпуклый многоугольник. Выражения для векторов  $\vec{OH}, \vec{OM}$  в треугольнике, средней линии в четырёхугольнике (1.2, 1.4, 1.11).
- 22.** Центр масс. Существование и единственность (7.1). Теорема о группировке масс (7.2, 7.3). Точка пересечения биссектрис, внешних биссектрис (7.7бв). Теорема Менелая (7.11)
- 23.** Свойства скалярного произведения векторов. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма (15.3). Тождество  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = \vec{0}$ . (15.4)
- 24.** Гомотетия. Лемма Архимеда (19.3). Окружность 9 точек (19.4). Композиция гомотетий (19.9в). Теорема Монжа (19.9г).
- 25.** Доказать, что прямая Симсона для точки делит пополам отрезок между ней и ортоцентром треугольника (19.6в). Доказать, что центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем точки касания полувписанной окружности и сторон (19.8вг).
- 26.** Поворотная гомотетия. Лемма о парах подобных треугольников (21.2). Поворотная гомотетия и окружности (21.3). Построение центра поворотной гомотетии (21.4).
- 27.** Теорема Шаля. Представление основных типов движений в виде композиции симметрий (25.4). Классификация движений по неподвижным точкам и ориентации.
- 28.** Композиция поворотов. Треугольник центров поворотов. Теорема Наполеона.



## Задачи к теорзачёту М8 профи

24 июля

1. (1.7) На сторонах треугольника  $ABC$  вне его построены правильные треугольники  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  и  $CAB_1$ . Докажите, что  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ .
2. (2.6) Пусть  $n$  и  $k$  натуральны,  $n > k$ ,  $a > 0$ . Докажите неравенство:  
$$na^k - ka^n \leq n - k$$
3. (4.3) 17 участников олимпиады решали 9 задач. Каждую задачу решили ровно по 11 участников. Докажите, что найдутся 2 таких участника, что каждая из 9 задач решена хотя бы одним из них.
4. (7.8) В параллелограмме  $ABCD$  на сторонах  $BC$  и  $CD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{ND}$ . Докажите, что центр масс треугольника  $AMN$  лежит на диагонали  $BD$ .
5. (8.5) Докажите, что для любого натурального  $n$  существует полный ориентированный граф на  $n$  вершинах, в котором хотя бы  $\frac{(n-1)!}{2^n}$  гамильтоновых циклов.
6. (9.2) Для положительных  $a, b, c$  верно соотношение  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Найдите максимум выражения  $ab + \sqrt{3}bc$ .
7. (10.6) Множество натуральных чисел разбито на конечное число непересекающихся подмножеств. Докажите, что среди них можно выбрать подмножество  $S$  такое, что для любого натурального числа  $n$  множество  $S$  содержит бесконечно много чисел, кратных  $n$ .
8. (11.4) Через точку  $O$  проходит прямая  $l$ . Из точки  $O$  проведены 2025 единичных векторов, лежащих в одной полуплоскости относительно  $l$ . Докажите, что длина их суммы больше 1.
9. (12.4) В некотором связном графе 100 вершин, причем степень каждой вершины не больше 9. Докажите, что в этом графе можно выделить 22 вершины так, чтобы любой замкнутый путь, проходящий только по выделенным вершинам, имел четную длину.
10. (13.5) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел  $n$  таких, что  $n$  является суммой двух квадратов целых чисел, а числа  $n - 1$  и  $n + 1$  – не являются.
11. (15.6) Точки  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AC$  и  $BD$  соответственно. Докажите, что:  
$$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2$$
12. (16.7) Существуют ли такие целые числа  $m, n \geq 1$ , что  $(5 + 3\sqrt{2})^n = (3 + 5\sqrt{2})^m$ ?
13. (17.7) Пусть  $p$  – нечетное простое,  $a$  не делится на  $p$ . Докажите, что квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c \equiv 0$  имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант  $D$  является квадратичным вычетом по модулю  $p$ .
14. (18.6) Пусть в графе  $2n$  вершин, причем степень первой вершины равна 1, второй – 2, третьей – 3, ...,  $(2n - 1)$ -ой –  $(2n - 1)$ . Сколько в этом графе гамильтоновых путей,

начинающихся с первой вершины?

15.(19.7) Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно,  $I$  – центр вписанной окружности. Прямые  $KL$  и  $MI$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что прямая  $AX$  проходит через середину стороны  $BC$ .

16.(20.7) Многочлен  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  имеет три различных корня, а многочлен  $P(Q(x))$ , где  $Q(x) = x^2 + x + 2025$ , корней не имеет. Докажите, что  $P(2025) > \frac{1}{64}$ .

17.(21.9аб) Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Лучи  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $P$ , лучи  $BA$  и  $CD$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $ABP$ ,  $CDP$ ,  $BCQ$ ,  $ADQ$  имеют общую точку  $M$ , причём центры этих окружностей и точка  $M$  лежат на одной окружности.

18.(22.2) Решите в целых числах уравнение:

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 4c^2 + (2c + 1)^2$$

19.(23.8г) Является ли счётным множество подмножеств  $\mathbb{N}$ , если известно, что среди любых двух одно является подмножеством другого?

20.(24.8) Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в 3 цвета?

21.(25.8) Коллинеарные точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  при некотором движении перешли в точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что середины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  лежат на одной прямой.

22.(26.2б) Является ли число  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  квадратичной иррациональностью с рациональными коэффициентами?

23.(27.4) В орграфе  $2n$  вершин, причем степени исхода и захода каждой вершины больше 0. Докажите, что в граф можно добавить не более  $n$  стрелок так, что граф станет сильно связным. Можно проводить более одной стрелки между двумя вершинами.

24.(28.6) На сторонах  $AB$  и  $BC$  правильного треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $MN \parallel AC$ ,  $E$  – середина отрезка  $AN$ ,  $D$  – центр треугольника  $BMN$ . Найдите угол  $CDE$ .

25.(29.4) Пусть  $p > 2$ ,  $q > 5$ ,  $p$  и  $q$  – простые. Известно, что  $2^p + 3^p$  делится на  $q$ . Докажите, что  $q \equiv 1 \pmod{2p}$ .

26.(31.6б) Докажите оценку в теореме Рамсея для раскраски графа в  $k$  цветов:  
$$R(k; n_1, \dots, n_k) \leq \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

27.(33.5) Докажите неравенство для положительных  $a, b, c$ :

$$\frac{a^6}{b^2 + c^2} + \frac{b^6}{c^2 + a^2} + \frac{c^6}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{2}abc(a + b + c)$$

28.(34.8) Пусть  $q$  – простое число, а  $4q + 1$  – тоже простое. Докажите, что 2 является первообразным корнем по модулю  $4q + 1$ .